TD Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Résolution d'équations

H9M **Exercice 1** Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes

1. $(1+x^2)y'+2xy=\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$
2. $y'=\frac{1}{1-x}y+\frac{x}{x-1}$ sur $]1,+\infty[$
3. $y'-y\tan x=-\cos^2 x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
4. $y'=\frac{2}{x}y+\frac{x}{x-1}$ sur $]1,+\infty[$
5. $y'=\frac{1}{x\ln x}y-\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln x}$ sur $]e,+\infty[$
6. ★ $(1+t^2)y'=ty+(1+t^2)$ sur $\mathbb{R}$

TI8 **Exercice 2** On considère $(E)\colon (1+x^2)y''-2y=0$.

1. Déterminer une solution particulière f non nulle de (E).
2. À l'aide du changement de variable $\tan u=x$, déterminer une primitive de $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.
3. En cherchant les solutions de la forme $x\mapsto C(x)f(x)$, résoudre (E).

YWO **Exercice 3** On considère l'équation différentielle $(E)\colon x^2y''-3xy'+4y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, et $z\colon t\mapsto y(e^t)$. Vérifier que z est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Raccordements

W9F **Exercice 4** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

1. $(x^2-1)y'=-xy$
2. $xy'=2y+x$
3. $xy'-y=x^2$

DCI **Exercice 5** Soit $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que l'équation $xy'+y=f(x)$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$ prolongeable par continuité en 0.

WCC **Exercice 6** ★ [Mines MP] On considère l'équation $(E)\colon y''-y=|\cos x|$ sur $\mathbb{R}_+$. On admet que pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, (E) admet une unique solution vérifiant $y(0)=a$ et $y'(0)=b$.

1. Existe-t-il des solutions positives ?
2. bornées ?
3. positives et bornées ?

Théorie

EPY **Exercice 7** On pose $I=[0,\beta[$, avec $\beta>0$.

1. Soit $g\colon I\to\mathbb{R}$ dérivable, et $k\geq 0$ tels que $g(0)\leq 0$ et $\forall t\in I,\ g'(t)\leq kg(t)$. Montrer que g est négative.
2. Soit $h\colon I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $h(0)=0$ et $\forall t\in I,\ |h'(t)|\leq k|h(t)|$. Montrer que h est nulle.
   Indication : *Chercher à appliquer la question précédente, à une fonction dont la dérivée est $|h'(t)|$.*
3. On considère à présent $f\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad (t,y)\mapsto f(t,y)$ lipschitzienne en y, c'est-à-dire qu'il existe k tel que
$$\forall t,y_1,y_2,\ |f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq k|y_1-y_2|.$$
   Soient $y,z\colon I\to\mathbb{R}$ vérifiant $y(0)=z(0)$ et $\forall t\in I,\ y'(t)=f(t,y(t))$ et $z'(t)=f(t,z(t))$. Montrer que $y=z$.
   C'est l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz général.

8JL **Exercice 8** ♣ Soit $g\colon [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue et $m>0$.

1. Résoudre le système de Cauchy $(E)\colon y'+my=g(x)$ et $y(0)=\alpha$.
2. Soit $f\colon [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   a) Montrer que si $f'+mf$ est bornée, f est bornée.
   Indication : *Poser $g=f'+mf$ et $\alpha=f(0)$.*
   b) ★ Montrer que si $f'+mf\to 0$, alors $f\to 0$.

Autres équations

8BI **Exercice 9** L'équation $y'=1+y^2$ admet-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?

084 **Exercice 10**

1. Déterminer les solutions de l'équation $(1-m)xF'(x)=mF(x)$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $m\in\,]0,1[$. Déterminer les fonctions continues sur $[0,+\infty[$ vérifiant
$$\forall x\geq 0,\ \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=mx\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

7Y1 **Exercice 11** Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable en 0 vérifiant $(H)\colon \forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. a) Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer un DL_1, quand $h\to 0$, de $f(a+h)$, et en déduire que f est dérivable en a.
   b) En dérivant l'équation par rapport à x, déterminer une équation différentielle vérifiée par f.
3. Quelles sont les fonctions vérifiant (H) ?

ZIZ **Exercice 12** ★ ★ Pour $\rho,\tau>0$, on considère l'équation différentielle $\forall t\in\mathbb{R},\ f'(t)+\rho f(t-\tau)=0$.

1. Pour quels couples (ρ,τ) admet-elle une solution exponentielle ?
2. Pour quels couples (ρ,τ) toutes les solutions possèdent-elles une infinité de zéros ?